$\Delta = 8x-7 \Rightarrow t' = \dfrac{-1-\sqrt{8x-7}}{4}$ et $t'' = \dfrac{-1+\sqrt{8x-7}}{4}$

On a $t' < 0$ donc cette solution est à rejeter d'où $\sqrt{y} = \dfrac{-1+\sqrt{8x-7}}{4}$

et par suite $y = (\dfrac{\sqrt{8x-7}-1}{4})^2 = \dfrac{4x-3-\sqrt{8x-7}}{8}$.

Conclusion : $\forall x \in [1,+\infty[,\ f^{-1}(x) = \dfrac{4x-3-\sqrt{8x-7}}{8}$.

Solution 10 :

1°/ f est définie, continue et dérivable sur $[0,\pi]$ et $\forall x \in [0,\pi]$, $f'(x) = -2\sin x$. Or $\forall x \in [0,\pi]$, $\sin x \geq 0$ d'où $\forall x \in [0,\pi]$, $f'(x) \leq 0$.

x	0		π
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	5	↘	1

2°/ f est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$ donc f réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $f([0,\pi]) = [1,5]$.

3°/a) • $g(5) = x \Leftrightarrow f(x) = 5 \Leftrightarrow 2\cos x + 3 = 5 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ (car $x \in [0,\pi]$) donc $g(5) = 0$.

• $g(3) = x \Leftrightarrow f(x) = 3 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ donc $g(3) = \dfrac{\pi}{2}$ (car $x \in [0,\pi]$).

b) f est dérivable sur $]0,\pi[$ et $\forall x \in]0,\pi[,\ f'(x) \neq 0$ donc g est dérivable sur $f(]0,\pi[) =]1,5[$.

4°/ Soit $x \in]1,5[$, $g'(x) = \dfrac{1}{f'[f^{-1}(x)]} = \dfrac{1}{f'[g(x)]} = \dfrac{-1}{2\sin[g(x)]} = \dfrac{-1}{2\sin y}$

avec $y = g(x)$.